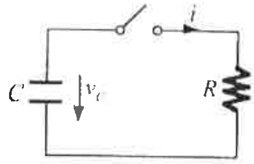
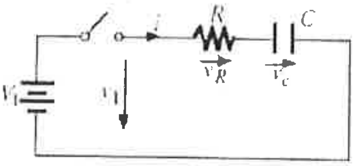
2ª Série de problemas

1. Considere o circuito representado na figura, com R=1MΩ e C=1μF.



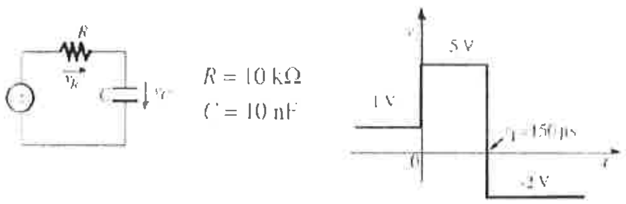
   a) Calcule os valores de Vc e i nos instantes 1s e 2s após o fecho do interruptor. Represente graficamente Vc(t) e i(t).
   b) Calcule o tempo necessário para que Vc(t)=5V.
   c) Determine o valor que deveria ter R para que Vc(t)=2V ao fim de 1s.

2. Considere o circuito representado na figura, com R=1kΩ, C=1nF e V1 representa um fonte de tensão de 10V.

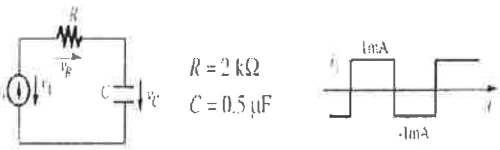


   a) Calcule Vc, VR e i nos seguintes instantes após o fecho do interruptor: 0.5τ, τ, 2τ, 3τ, 4τ e 5τ. Represente graficamente v1(t), Vc(t), VR(t) e i(t).
   b) Calcule o tempo de subida de Vc(t) entre 10% e 90% do valor final.
   c) Calcule a energia armazenada no condensador quando Vc=5V, bem como a energia fornecida pela bateria e a dissipada na resistência até esse instante.

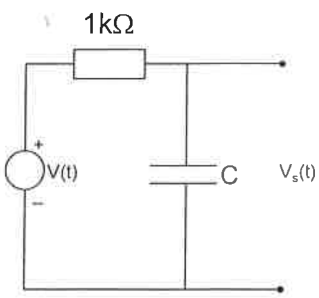
3. Considere o circuito representado na figura, ao qual se aplica uma tensão V1(t) com a forma igualmente especificada na figura. Determine as expressões de Vc(t) e VR(t) e represente graficamente.



4. Considere o circuito representado na figura, no qual i(t) é uma corrente periódica com frequência de 1kHz e tem a forma indicada. Admitindo que o valor médio de Vc(t) é de 2V, calcule os seus valores máximo e mínimo e represente graficamente Vc(t), VR(t) e V1(t).



5. Considere o circuito representado na figura.



   a) determine o valor de C sabendo que quando V(t) representa um sinal com uma amplitude de 10V e uma frequência de 1kHz, se obtém na saída um sinal com 3V de amplitude.
   b) Determine a diferença de fase entre $V_s(t)$ e V(t) nas condições da alínea anterior.
   c) Represente os vectores **i**(t),**V**(t),$\mathbf{V}_R$(t), e $\mathbf{V}_s$(t) no

espaço imaginário, num instante de tempo à sua escolha.

6. Considere um filtro passa-alto com uma frequência de corte de 1kHz. Determine:
   a) o valor da resistência utilizada no circuito sabendo que C=1μF.
   b) a impedância do circuito vista dos terminais da fonte para uma frequência tripla da frequência de corte.
   c) esboce o que espera obter na saída do circuito quando excitar o circuito com um sinal sinusoidal de 5V de amplitude nos dois limites $\omega >> \omega_0$ e $\omega << \omega_0$.

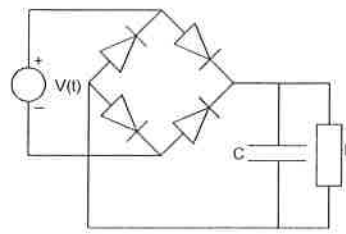
7. Projecte um filtro passa-baixo com uma frequência de corte de 5kHz, e cuja impedância seja de 1kΩ à frequência de 1kHz.

8. Admitindo que possui um indutor com uma indutância de 150mH, projecte um filtro passa-banda com a banda passante centrada numa frequência de 3kHz com um factor de qualidade Q=50. Determine a largura de banda do filtro.

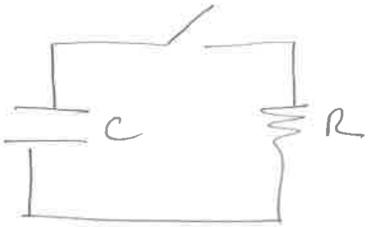
9. Considere um circuito RLC com R=1Ω, e C=100μF ao qual se encontra aplicada uma tensão sinusoidal com uma frequência de 50Hz. Determine o valor do indutor que anula a energia reactiva consumida pelo circuito.

10. Considere o circuito representado na figura onde C=10μF, R_c=1kΩ, os díodos representados são semelhantes aos que utilizou nas aulas práticas, e a tensão, gerada por um gerador de tensão ideal, tem a forma $V(t)=V_0 \operatorname{sen}(2\pi\times 10^3 t)$, com V_0=5V.

    a) Esboce detalhadamente o sinal que espera obter aos terminais da resistência R_c quando o condensador não está ligado.
    b) Repita a alínea anterior admitindo agora que o condensador se encontra ligado como se representa na figura.
    c) Estime o valor da ondulação residual aos terminais da resistência de carga.



①



$R = 1\,M\Omega$, $C = 1\,\mu F$, $V_c = 10\ (t=0)$ $\Big\} \Rightarrow RC = 10^{6} \times 10^{-6} = \underline{1}$

a) $V_c(t) = V_R(t) = R\,i(t)$

$i(t) = i_0\, e^{-t/RC} = \dfrac{V_0}{R}\, e^{-t/RC}$

$t=0 \Rightarrow i = \dfrac{10\,V}{10^6\,\Omega} = 10\,\mu A$

$t = 1\,s \Rightarrow i = 10\,\mu A \times e^{-1} \simeq 3{,}6\,\mu A$

$t = 2\,s \Rightarrow i = 10\,\mu A \times e^{-2} \simeq 1{,}3\,\mu A$

b) $V_c(t) = V_R(t) = R\,i(t) = \cancel{R}\,\dfrac{V_0}{\cancel{R}}\, e^{-t/R} = V_0\, e^{-t/RC}$

$\dfrac{V_c(t)}{V_0} = e^{-t/RC} \Rightarrow -\dfrac{t}{RC} = \ln\left(\dfrac{V_c(t)}{V_0}\right)$

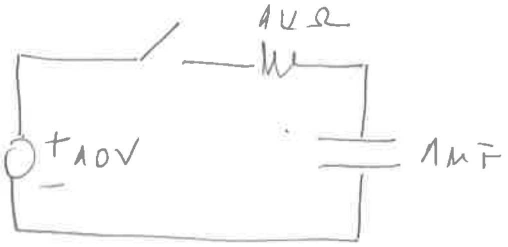
$$\boxed{t = RC\,\ln\left(\frac{V_0}{V_c(t)}\right)}$$

$RC = 1\,s \Rightarrow t = 1 \times \ln(2) \Rightarrow t \simeq 0{,}69\ s$

c) $\dfrac{2}{10} = e^{-\left(\frac{1}{R \times 10^{-6}}\right)} \Rightarrow \ln\left(\dfrac{2}{10}\right) = -\dfrac{1}{R \times 10^{-6}}$

$\Rightarrow \ln 5 = \dfrac{1}{R \times 10^{-6}} \Rightarrow R = \dfrac{1}{\ln(5) \times 10^{-6}} \simeq 0{,}621\,M\Omega$

②



NUMA MALHA RC:

$$\begin{cases} i(t) = \dfrac{V_0}{R}\, e^{-t/\tau} \\ V_R(t) = R \times i(t) = V_0\, e^{-t/RC} \\ V_c(t) = V_0\,(1 - e^{-t/RC}) \end{cases}$$

t/τ	$e^{-t/\tau}$	$i/\mu A$	V_R/V	V_c/V
0,5	0,606	6,1	6,1	3,9
1	0,368	3,7	3,7	6,3
2	0,1353	1,3	1,3	8,6
3	0,0498	0,50	0,50	9,5
4	0,0183	0,18	0,18	9,8
5	0,0067	0,07	0,07	9,9

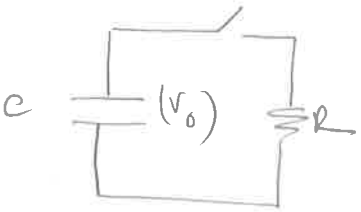
b) $\frac{V_c(t)}{V_0} = 1 - e^{-t/\tau} \Rightarrow \left(1 - \frac{V_c(t)}{V_0}\right) = e^{-t/\tau} \Rightarrow \ln\left(1 - \frac{V_c(t)}{V_0}\right) = -\frac{t}{\tau}$

$-\frac{t}{\tau}(10\%) = \ln(1-0,1) = \ln(0,9) \simeq -0,10$

$-\frac{t}{\tau}(90\%) = \ln(1-0,9) = \ln(0,1) \simeq -2,30$

$\Delta t = (2,3 - 0,1)\tau = 2,2\,(10^{3} \times 10^{-9})\,s \simeq 2,2\,\mu s$

c) QUAL É ENERGIA ARMAZENADA NUM CONDENSADOR CARREGADO COM UMA TENSÃO V? EXACTAMENTE A ENERGIA QUE SERÁ DISSIPADA NUMA RESISTÊNCIA R QUE LHE SEJA LIGADA AOS TERMINAIS DESDE O INSTANTE $t=0$ ATÉ AO INSTANTE $t=+\infty$!



$i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$

$P(t) = R i^2 = \cancel{R} \frac{V_0^2}{R^{\cancel{2}}} e^{-2t/RC} = \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/RC}$

$E_{TOTAL} = \int_0^{+\infty} P(t)\,dt = \frac{V_0^2}{R} \int_0^{+\infty} e^{-2t/RC}\,dt = \frac{V_0^2}{\cancel{R}}\left(-\frac{\cancel{R}C}{2}\right) \underbrace{\left[e^{-2t/RC}\right]_0^{+\infty}}_{=(0-1)=-1}$

$$\boxed{E_{TOTAL} = \frac{1}{2} C V_0^2}$$

Neste caso:

$E_{TOTAL} = \frac{1}{2}\, 10^{-9} \times 5^2 = 12,5\ nJ$

VAMOS AGORA CALCULAR A POTÊNCIA FORNECIDA PELO GERADOR (P_g):

$t\,(V_c = 5V) = ?$

$V_c(t) = V_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \Rightarrow \frac{1}{2} = 1 - e^{-t/\tau} \Rightarrow \ln(0,5) = -t/\tau$

$\Rightarrow t = -\tau\left(\ln(0,5)\right) \simeq 0,693\,\tau$

$P_g(t) = V_g \times i(t) = 10 \times \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau} = \frac{10^2}{10^3} e^{-t/\tau} = 0,1\, e^{-t/\tau}$

A ENERGIA TOTAL FORNECIDA PELO GERADOR DESDE O INÍCIO ATÉ $t = 0,693\,\tau$ SERÁ:

$$E_g = \int_0^{0,693\tau} P_g(t)\,dt = 0,1 \times (-\tau)\left[e^{-t/\tau}\right]_0^{0,693\tau} =$$

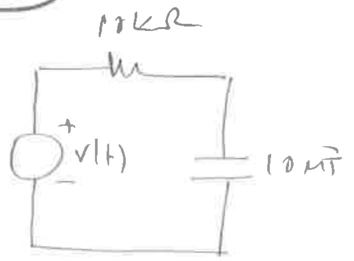
$$= -0,1\,\tau\,(\underbrace{e^{-0,693}}_{=0,5} - 1) = (0,05 \times \tau)\ J$$

$\boxed{\tau = 10^3 \times 10^{-9} = 10^{-6}\,s} \Rightarrow E_g = 5 \times 10^{-2} \times 10^{-6}\,J = 50\,nJ$

A PARTE DESTA ENERGIA QUE FOI DISSIPADA NA RESISTÊNCIA É A QUE NÃO ESTÁ NO FINAL ARMAZENADA NO CONDENSADOR:

$$E_{DISSP.} = E_g - E_{cond.} = 50\,nJ - 12,5\,nJ = 37,5\,nJ$$

3



$RC = 10^4 \times 10^{-8} = 10^{-4}\,s = 100\,\mu s$

$$v(t) = \begin{cases} 1V & (t = -\infty \text{ até } t = 0) \quad (a) \\ 5V & (t = 0 \text{ até } t = 150\mu s) \quad (b) \\ -2V & (t = 150\mu s \text{ até } t = +\infty) \quad (c) \end{cases}$$

(a) $\rightarrow \begin{cases} V_c(t) = 1\,V \\ V_R(t) = 0 \end{cases}$

(b) $\rightarrow V_c(t) = 1V + 4\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = \left(5 - 4e^{-t/\tau}\right) V$

$i(t) = \frac{4}{10^4} e^{-t/\tau}\ A \Rightarrow \boxed{V_R(t) = 4e^{-t/\tau}}$

(c) EM $t = 150\mu s = 1,5\,\tau$

$V_c(t) = 5 - 4e^{-1,5} \simeq 4,1\,V$

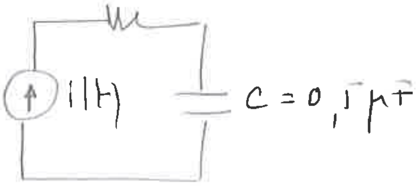
Logo, a partir deste instante será:

$$V_c(t) = 4,1 + (-6,1)\left(1 - e^{-\frac{(t-150\mu s)}{\tau}}\right)$$

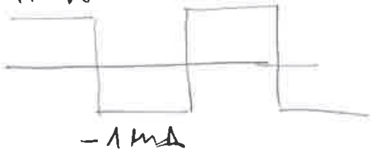
$$\boxed{V_c(t) = -2 + 6,1\, e^{-\frac{(t-150\mu s)}{\tau}}}$$

$$\boxed{V_R(t) = -6,1\, e^{-\frac{(t-150\mu s)}{\tau}}}$$

4



$i(t) \equiv$

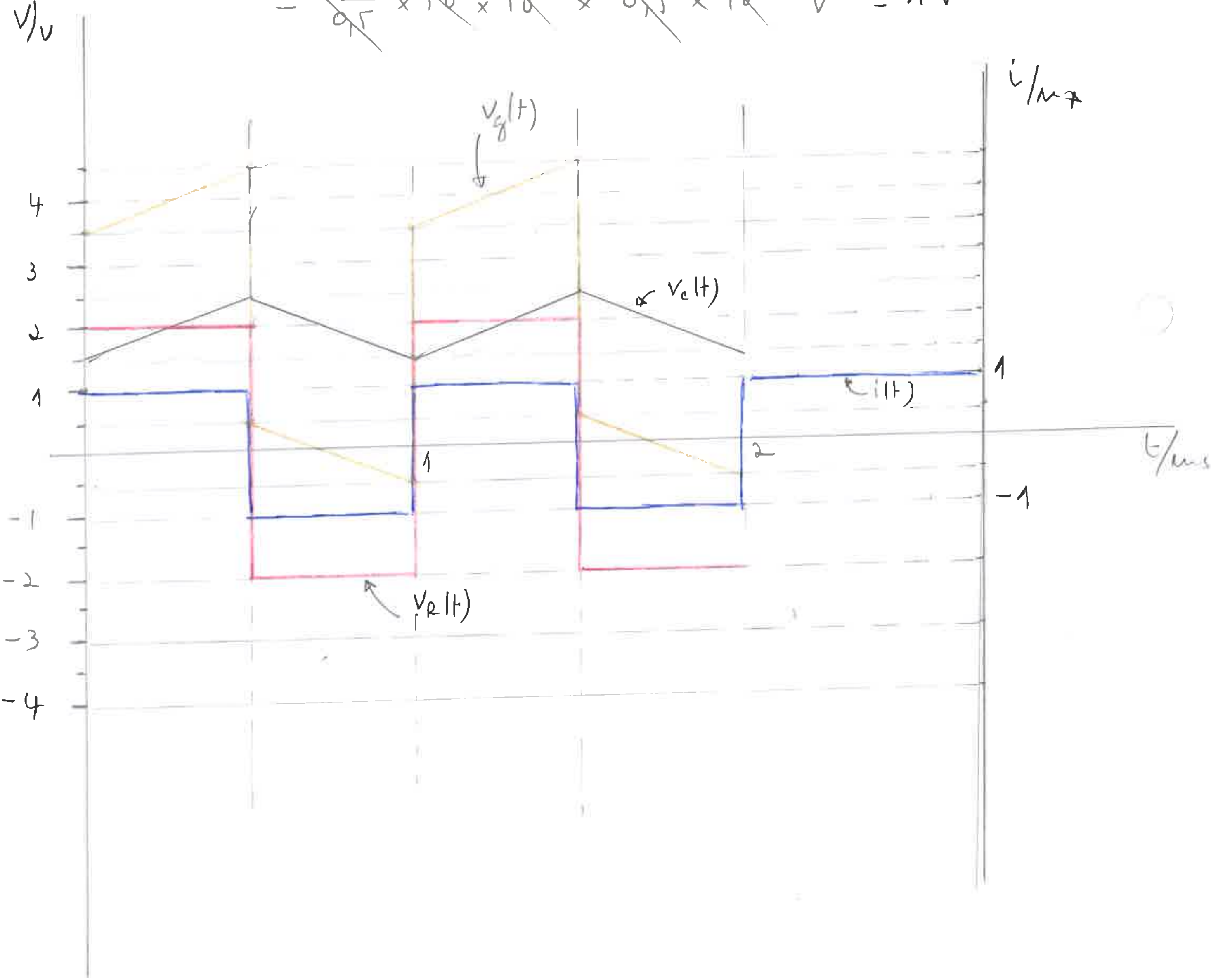


($f = 1kHz$)

$$\langle v_c(t) \rangle = 2V$$

$$\Delta V_c = \frac{1}{C}\int_{\frac{1}{2}\text{Período}} i(t)\,dt = \left(\frac{1}{0,5\times10^{-6}} \times 1mA \times \frac{1}{2f}\right) V \simeq$$

$$\simeq \cancel{\frac{1}{0,5}} \times \cancel{10^{6}} \times \cancel{10^{-3}} \times \cancel{0,5} \times \cancel{10^{-3}}\ V = 1\,V$$



(5)

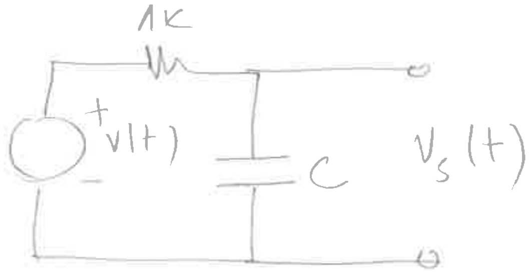
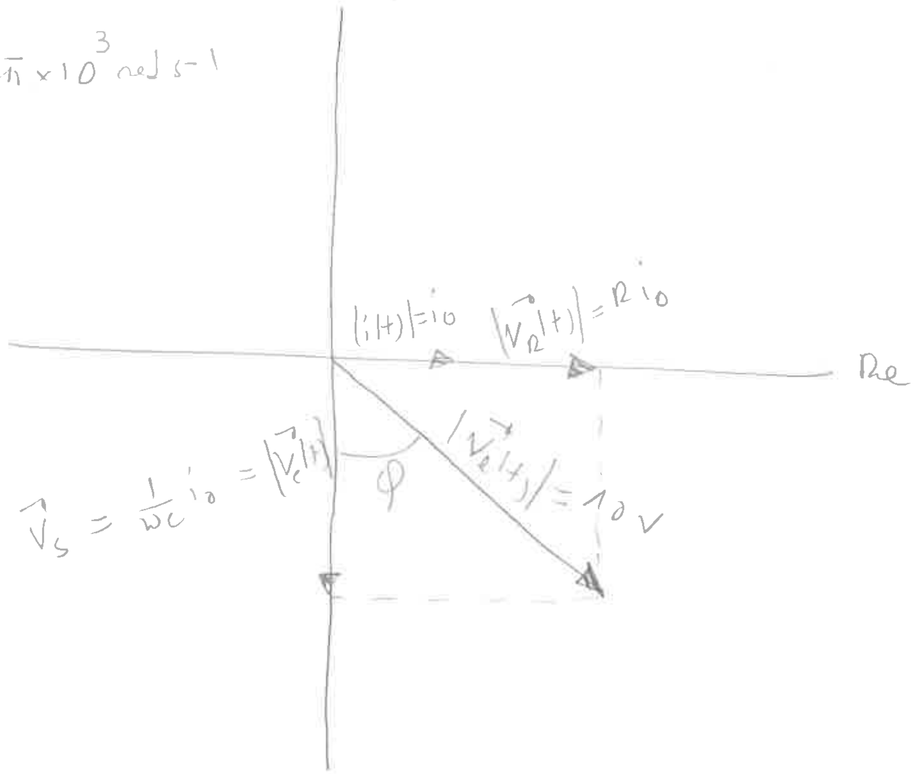


DIAGRAMA DE ARGAND (REPRESENTAÇÃO NO INSTANTE EM QUE A CORRENTE É NULA)

$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 10^3$ rad s^{-1}



a)

$$\begin{cases} |\vec{V}_e(t)| = \sqrt{(R i_0)^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 i_0^2} = i_0 \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = 10\text{ V} \\ |\vec{V}_s(t)| = \frac{1}{\omega C} i_0 = 3\text{ V} \Rightarrow i_0 = 3\omega C \end{cases}$$

$$\frac{10}{3} = \omega C \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{(R\omega C)^2 + 1}$$

$$\frac{100}{9} = (R\omega C)^2 + 1 \Rightarrow C^2 = \frac{100/9 - 1}{(R\omega)^2}$$

$$C = \frac{\sqrt{100/9 - 1}}{R\omega} = \frac{2.33}{10^3 \times 2\pi \times 10^3} \simeq 0{,}4\,\mu\text{F}$$

b) $$\varphi = -\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{R \cancel{i_0}}{\frac{1}{\omega C}\cancel{i_0}}\right) = -\operatorname{tg}^{-1}(R\omega C) = -\operatorname{tg}^{-1}\left(\cancel{10^3} \times 2\pi \times \cancel{10^3} \times 0{,}4 \times \cancel{10^{-6}}\right)$$

$$= -\operatorname{tg}^{-1}(2{,}51) = -68{,}3^\circ$$

⑥

⑥

a) NA FREQUÊNCIA DE CORTE $X_R = X_C$

$$R = \frac{1}{w_c C} = \frac{1}{2\pi \times 10^3 \times 1\times 10^{-6}} \simeq 160\ \Omega$$

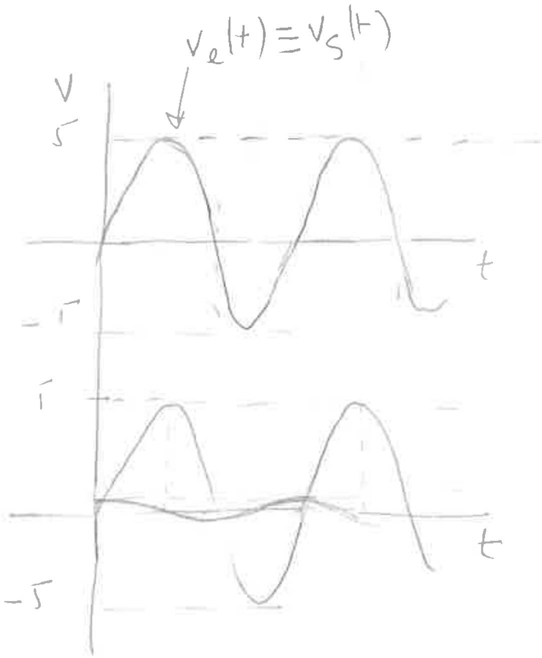
b) $$\vec{Z} = R - \left(\frac{1}{wC}\right) j = 160 + \frac{1}{2\pi \times 10^3 \times 10^{-6}} j \simeq 160 + 159 j$$

$$|\vec{Z}| = \sqrt{160^2 + 159^2} \simeq 226{,}6\ \Omega$$

c) FILTRO PASSA-ALTO; (SAÍDA EM R)

$$w \gg w_0 \quad \begin{cases} f(w) \simeq 1 \\ \phi \simeq 0 \end{cases}$$

$$w \ll w_0 \quad \begin{cases} f(w) \simeq 0 \\ \phi \simeq +\pi/2 \end{cases}$$



⑦ $$\begin{cases} X_R = X_C \quad a \ 5\,kHz \\ |\vec{Z}| = 10^3\ \Omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} R = \dfrac{1}{2\pi \times 5\times 10^3 C} \\ \sqrt{R^2 + \left(\dfrac{1}{2\pi\times 5\times 10^3 \times C}\right)^2} = 10^3 \end{cases} \quad \begin{cases} \\ \left(\dfrac{1}{2\pi\times 5\times 10^3 C}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2\pi\times 5\times 10^3 C}\right)^2 = 10^6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2}{(2\pi\times 5\times 10^3 C)^2} = 10^6 \end{cases} \quad \begin{cases} 2 = 10^6 \times (2\pi \times 5\times 10^3)^2 C^2 \end{cases} \quad \begin{cases} C = \sqrt{\dfrac{2}{(10\pi)^2 \times 10^{12}}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R = \dfrac{1}{2\pi\times 5\times 10^3 \times 4{,}5\times 10^{-8}}\ \Omega \\ C = 4{,}5\times 10^{-8}\ F \end{cases} \quad \begin{cases} R \simeq 707\ \Omega \\ C = 4{,}5 \times 10^{-8}\ F \end{cases}$$

8

$L = 150\ mH$

$\omega_0 = 3\ kHz$

$Q = 50$

$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi \times 3 \times 10^{3} \\ \frac{2\pi \times 3 \times \cancel{10}^{3} \times 150 \times \cancel{10}^{-3}}{R} = 50 \end{cases} \qquad \begin{cases} C = \frac{1}{(2\pi \times 3 \times 10^{3})^2 \times 150 \times 10^{-3}}\ F \\ R = \frac{6\pi \times 150}{50} = 18\pi\ \Omega \end{cases}$$

$L = 150\ mH$; $R \simeq 56\ \Omega$; $C \simeq 1{,}9 \times 10^{-8}\ F$

9

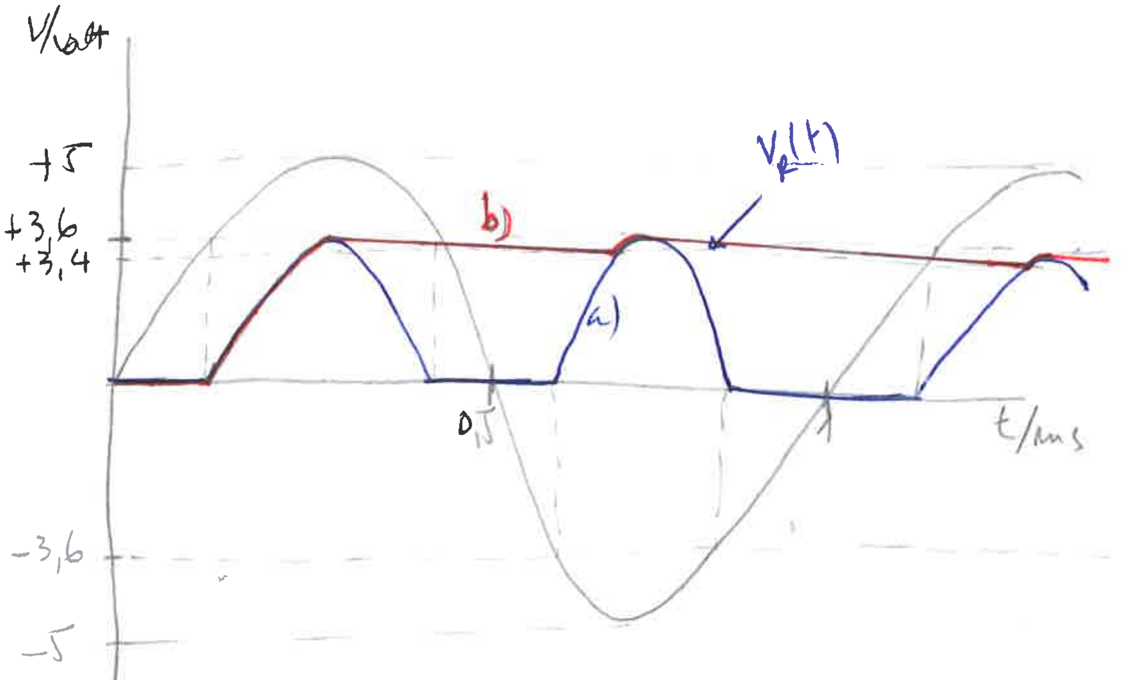
$f = 50\ Hz \Rightarrow \omega = 2\pi \times 50\ rad\,s^{-1} \simeq 314\ rad\,s^{-1}$

PARA QUE A POTÊNCIA REACTIVA SEJA NULA,

$X_C = X_L \Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C}$

$L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{(314)^2 \times 10 \times 10^{-6}}\ H \simeq 1\ H$

10



$(\Delta V_C)_{max} < \frac{V_0}{2fRC} = \frac{3{,}6}{2 \times 10^3 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-6}}\ V$

$\simeq 0{,}2\ V$